Deuxième épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Lors de la correction il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies. On prendra soin de garder les notations du texte.

RAPPELS ET DEFINITIONS

1/ On désigne par $M_n(\mathbb{Z})$ (resp. $M_n(\mathbb{R})$) (resp. $M_n(\mathbb{Q})$) l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{R}$), (resp. $\mathbb{Q}$). I_n désigne la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. $GL(n,\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant non nul.

2/ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On désigne par $Tr(A)$ le réel $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) On rappelle que si $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $Tr(AB) = Tr(BA)$ et que si $P \in GL(n,\mathbb{R})$ on a $Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$.

b) On rappelle que $Tr(A)$ est la somme des valeurs propres de A (comptées avec leur ordre de multiplicité).

3/ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\det(A)$ le déterminant de la matrice A. On rappelle que $\det(A)$ est le produit des valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité).

I.

On considère le polynôme $P(X) = X^2+X+1$.

1) Montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. L'est-il dans $\mathbb{R}[X]$? Dans $\mathbb{C}[X]$?

2) On désigne par G l'ensemble des matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $P(A) = A^2+A+I_2 = 0$. Soit A un élément de G.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé. Montrer que l'on a $(\lambda^2+\lambda+1)x = 0$.

b) En déduire le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres de A.

c) On désigne par f l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à A.

i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2-\{0\}$ $\{x,f(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^2-\{0\}$. Quelle est la matrice de f par rapport à la base $\{x,f(x)\}$?

3) Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $P(D) = 0$.

b) Montrer que pour tout E de G il existe $Q \in M_2(\mathbb{R})$ inversible tel que $E = QDQ^{-1}$.

II.

Dans cette partie on se propose de déterminer toutes les matrices A de $M_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_2$.

1) Soit f une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas une homothétie.

a) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{x,f(x)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice de f par rapport à cette base soit du type $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

2) Déduire du II.1) que si $A \in M_2(\mathbb{R})$, A vérifie l'équation

$$A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0$$

Tournez la page S. V. P.

3) On désigne par $GL(2,\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1. Montrer que $GL(2,\mathbb{Z})$ est un groupe.

4) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, $A \neq \pm I_2$ tel que $A^2 = I_2$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a) Montrer que 1 et -1 sont les valeurs propres de A. En déduire que $a+d = 0$ et $a^2+bc = 1$.

b) En déduire qu'il existe une matrice inversible $S \in M_2(\mathbb{Q})$ tel que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) On suppose qu'il existe $Q \in GL(2,\mathbb{Z})$ tel que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que

$$(B) \quad \begin{cases} AX = X \\ AX' = -X' \end{cases} \qquad |xy'-yx'| = 1 \qquad (x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4$$

d) Montrer que si la condition (B) est satisfaite alors il existe $Q' \in GL(2,\mathbb{Z})$ tel que $Q'^{-1}AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

e) On suppose la condition (B) satisfaite.

i) Montrer qu'alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$ le vecteur $\frac{1}{2}(I_2+A)(\alpha X+\beta X')$ a ses composantes entières.

ii) En déduire que a-1, b, c sont pairs.

f) Soit $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^2$, $a^2+bc = 1$, b et c pairs.

i) On suppose $bc \neq 0$. Soit δ le pgcd de a-1 et de b. Montrer qu'il existe $(\alpha,a',b') \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$a-1 = \delta a' \qquad b = \delta b' \qquad 1 = \frac{\alpha}{2} b' - \frac{\delta}{2} a' \quad (\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\delta}{2}) \in \mathbb{Z}^2$$
$$1+a = \alpha b' \qquad c = -\alpha a'$$

ii) Montrer que si $bc \neq 0$ il existe $T \in GL(2,\mathbb{Z})$ tel que $T^{-1}LT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

iii) Etudier le cas $bc = 0$.

5) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ tel que $A^2 = I_2$.

a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{Z}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $(x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4$ tels que

- $AX = X$
- $|xy'-yx'| = 1$
- $AX' = -X'+\gamma X$.

b) En déduire qu'il existe $T' \in GL(2,\mathbb{Z})$ tel que $T'^{-1}AT' = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que si γ est impair, il existe $S \in GL(2,\mathbb{Z})$ tel que $S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6) a) Montrer que sur $M_2(\mathbb{Z})$ la relation Δ suivante est une relation d'équivalence :

$$A \Delta B \iff \exists U \in GL(2,\mathbb{Z}) \ / A = U^{-1}BU$$

b) Soit E l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 = I_2$. Montrons que Δ est une relation d'équivalence sur E. Trouver les classes d'équivalence de E modulo Δ. En déduire une réponse à la question posée au début du II.

7) Soient n un entier >0 et A une matrice de $M_2(\mathbb{Z})$ tel que $A^n = I_2$. On suppose de plus que A admet une valeur propre λ complexe, non réelle. Montrer que A satisfait l'une des équations :

$$A^2 = -I_2 \qquad A^2+A+I_2 = 0 \qquad A^2-A+I_2 = 0$$

III.

A) Soit f une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ admettant 1 comme seule valeur propre complexe (1 est donc d'ordre de multiplicité n).

1) Montrer qu'il existe $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(e_1) = e_1 \neq 0$.

Tournez la page S. V. P.

2) Soient $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et F le sous-espace engendré par $(f_i)_{2\leq i\leq n}$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e_1 \oplus F$ et que $(f_i)_{2\leq i\leq n}$ est une base de F.

b) Trouver la forme de la matrice de f par rapport à cette base.

c) Soit p la projection de E sur F parallèlement à $\mathbb{R}e_1$. Quelle est la matrice de pofop relativement à cette base ?

d) On considère l'application $\text{pofop}\big|_F$ de F dans F définie par

$$\text{pofop}\big|_F(x) = \text{pofop}(x) \qquad \forall x \in F$$

Trouver les valeurs propres de $\text{pofop}\big|_F$.

3) Montrer à l'aide de ce qui précède et par récurrence sur n qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f par rapport à cette base ait la forme suivante $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \\ & 1 & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ ($\forall i \ a_{ii} = 1$; $a_{ij} = 0 \ \forall i \forall j \ i > j$).

B) On désigne par $GL(n,\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1. Montrer que $GL(n,\mathbb{Z})$ est un groupe.

IV.

G_1 désigne dans cette partie un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{Z})$ ayant m éléments. On admettra que pour tout g de G_1 on a $g^m = I_n$.

1) On pose $M = \sum_{g\in G_1} g$.

a) Montrer que pour tout h de G_1 on a $hM = M$. En déduire que $M^2 = mM$.

b) En déduire que l'entier $\sum_{g\in G_1} \text{Tr}(g)$ est divisible par m.

2) *On admettra que pour tout entier* $k \geq 2$, $\sum_{g\in G_1} (\text{Tr}(g))^k$ est divisible par m. En déduire que si $f \in \mathbb{Z}[X]$, $\sum_{g\in G_1} f(\text{Tr}(g))$ est divisible par m.

3) Soit $g \in G_1$ tel que $\text{Tr}(g) = n$. On se propose dans cette question de montrer que $g = I_n$.

a) Démontrer que les valeurs propres de g sont de module 1.

(On pourra utiliser $g^m = I_n$).

b) Soient $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ n nombres complexes de module 1 tel que $\sum_{i=1}^{n} z_i = n$. Montrer que pour tout i, $z_i = 1$.

c) En déduire que 1 est la seule valeur propre de g.

d) Déduire du III/ A) que la matrice $B = I_n + g + \ldots + g^{m-1}$ est inversible et que $(g - I_n)B = 0$. Conclure.

4) On désigne par $t_1 = n, t_2, \ldots, t_r$ les valeurs distinctes de $\text{Tr}(g)$, g parcourant G_1.

a) On pose $Q(X) = \prod_{i=2}^{r} (X - t_i)$. Montrer que pour tout g de G_1, distinct de I_n, on a $Q(\text{Tr}(g)) = 0$.

b) En utilisant IV/ 2), montrer que m divise l'entier $(n-t_2)(n-t_3)\ldots(n-t_r)$.

c) En déduire que m divise $(2n)!$.